

### III. DIE ANTIPRISMATISCHE DOPPELPYRAMIDE UND WEITERE POLYEDERTYPEN

(1) Eine n-eckige *antiprismatische Doppelpyramide*  $P$ ,  $n$  gerade, besteht aus zwei Ecken  $N$  und  $S$  vom Grad  $k = (n-2)/2$  und einem Ring aus  $2k = (n-2)$  Dreiecken. In Kapitel IV werden wir zeigen, daß das für  $n = 14$  optimale Polyeder ein Polyeder diesen Typs ist; weiters ist der Typus Nr. 85 der Brückner'schen Liste [s. Abb. 2] der Typus einer 10-eckigen antiprismatischen Doppelpyramide. Die Basiskanten der Dreiecke um  $N$  bilden das obere Kappenpolygon, die Basiskanten der Dreiecke um  $S$  das untere. Von den Ringdreiecke haben  $k$  eine Kante (ihre "Basis") mit dem oberen und einen Eckpunkt (ihre "Spitze") mit dem unteren Kappenpolygon gemeinsam; die Basiskanten der übrigen Ringdreiecken formen das untere Kappenpolygon und ihre Spitzen sind die Eckpunkte des oberen.

Vermutlich ist das Volumen einer beliebigen antiprismatischen Doppelpyramide kleiner oder gleich dem Volumen einer symmetrischen antiprismatischen Doppelpyramide. Bei dieser sind  $N$  und  $S$  antipodische Punkte, die Dreiecke um  $N$  und um  $S$  sind gleichschenkelig und kongruent; weiters besitzt das Polyeder nur gleichschenkelige und zueinander kongruente Ringdreiecke. Der halbe Winkel an der Spitze der Kappendreiecke beträgt  $\pi/k$ , ihr Basiswinkel sei  $\gamma$ , und weiters sei  $\alpha$  der halbe Winkel an der Spitze der Ringdreiecke und  $\beta$  deren Basiswinkel.

Da die Basiskante eines Ringdreiecks zugleich Basiskante eines Kappendreiecks ist, folgt aus den Niperschen Regeln:  $\cos \pi/k / \sin \gamma = \cos \alpha / \sin \beta$ . Da das Mosaik der symmetrischen antiprismatischen Doppelpyramide die Kugeloberfläche in  $2k$  kongruente Teile zerlegt, ist:

$$2 \cdot (\pi/k + \gamma - \pi/2) + 2 \cdot (\alpha + \beta - \pi/2) = 4\pi/2k \text{ bzw. } \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Somit ist das Volumen der symmetrischen antiprismatischen Doppelpyramide gegeben durch

$$V = \frac{k}{3} \cdot ( S(\frac{\pi}{k}, \gamma) + S(\alpha, \beta) ) \text{ mit } \alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ und } \frac{\cos \pi/k}{\sin \gamma} = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} .$$

Aus den Nebenbedingungen folgt mit  $p = \tan(\pi/k)$ :

$$\cos(\pi/k) \cdot \sin \beta = \cos(\pi/k) \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \gamma) = \cos \alpha \cdot \sin \gamma, \text{ bzw.}$$

$$\sqrt{1+p^2} = 1 + \cot \gamma \cdot \tan \alpha, \text{ bzw. } \tan \alpha = (\sqrt{1+p^2} - 1) \cdot \tan \gamma, \text{ und weiters:}$$

$$\cot \beta = \cot(\pi - (\alpha + \beta)) = -\tan(\alpha + \gamma) = \frac{\tan \alpha \cdot \tan \gamma - 1}{\tan \alpha + \tan \gamma} .$$

Setzen wir  $x = \tan \gamma$ , so erhalten wir daraus:

$$S\left(\frac{\pi}{k}, \gamma\right) = \frac{2 \cdot (x^2 p^2 - 1)}{(1 + p^2) \cdot p \cdot x^2} \text{ sowie } S(\alpha, \chi) = \frac{2 \cdot (x^2 p^2 - 1)}{(1 + p^2) \cdot (\sqrt{1 + p^2} - 1) \cdot x^3} \text{ bzw.:}$$

$$V = \frac{k}{3} \cdot \frac{2 \cdot (p^2 x^2 - 1) \cdot (p + (\sqrt{1 + p^2} - 1) \cdot x)}{p \cdot (1 + p^2) \cdot (\sqrt{1 + p^2} - 1) \cdot x^3}, \text{ und es ist somit:}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{3p - 2 \cdot (\sqrt{1 + p^2} - 1) \cdot x - p^3 x^2}{3p \cdot (1 + p^2) \cdot (\sqrt{1 + p^2} - 1) \cdot x^4}.$$

Somit kann  $dV/dx$  nur dann verschwinden, wenn:

$$x = (\sqrt{2} - 1) \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{2}} \text{ für } k = 4 \text{ und } x = (6 - 3\sqrt{3}) \pm 6 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ für } k = 6.$$

Dabei ist der Wert mit "-" in beiden Fällen negativ; daher ist nur der Wert mit "+" von Interesse. Setzen wir diesen Wert in die zweite Ableitung von  $V$  ein, so erhalten wir in beiden Fällen eine negative Zahl, und daher ist das Volumen der symmetrischen antiprismatischen Doppelpyramide

für  $k = 4$  kleiner oder gleich  $\approx 2.21871$  und für  $k = 6$  kleiner oder gleich  $\approx 2.72098$ .

**(2)** Wir können das Volumen einer beliebigen antiprismatischen Doppelpyramide dadurch nach oben abschätzen, daß wir zunächst jedes Ringdreieck durch ein flächengleiches Dreieck mit gleicher Basiskante ersetzen. Sind bereits alle Ringdreiecke gleichschenkelig, so können wir das Volumen des Polyeders dadurch nach oben abschätzen, daß wir die Ringdreiecke durch kongruente Ringdreiecke mit derselben Summe der Basiswinkel und derselben Summe der Winkel an der Spitze der Dreiecke ersetzen, denn die Funktion  $G$ , die das Volumen eines gleichschenkeligen Dreiecks als Funktion des Basiswinkels  $\beta$  und des Halbwinkels  $\alpha$  an der Spitze angibt, ist  $[s, (1, 2)]$  streng konkav. Zuletzt ersetzen wir noch die Dreiecke um  $N$  und um  $S$  durch kongruente reguläre Ecken vom Grad  $k$ .

Daher ist das Volumen der antiprismatischen Doppelpyramide kleiner oder gleich:

$$W = \frac{k}{3} \cdot (G\left(\frac{\pi}{k}, \gamma\right) + G(\alpha, \beta)) \text{ mit } \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Ist  $a$  die Basiskante der Kappen- und ist  $c$  die Basiskante der Ringdreiecke, so folgt aus den Neper'schen Regeln:

$$\cos a = \frac{\cos \pi/k}{\sin \gamma} \text{ bzw. } \cos c = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}.$$

Wir unterscheiden nun die Fälle  $a = c$ ,  $a < c$  und  $a > c$ :

**(a)** Ist  $a = c$ , so läßt sich die von uns erhaltene obere Abschätzung für das Polyedervolumen als Polyedermosaik realisieren; d.h. die Funktion  $W$  fällt mit der Funktion  $V$  des vorigen Abschnittes zusammen.

**(b)** Ist  $a < c$ , so betrachten wir zunächst den Fall  $2\alpha \leq \beta$ . Wir vergrößern das Volumen der Ringdreiecke, wenn wir sie durch flächengleiche gleichseitige Dreiecke ersetzen. Somit ist

$$W \leq X = X(\alpha) := \frac{k}{3} \cdot ( G(\frac{\pi}{k}, \pi - 3\alpha) + G(\alpha, 2\alpha) ).$$

Da  $a < c$  folgt:

$$\frac{\cos \pi/k}{\sin(\pi - 3\alpha)} \geq \frac{\cos \alpha}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow \alpha \geq \arcsin \sqrt{\frac{3 - 2 \cdot \cos(\pi/k)}{4}} =: \alpha_1.$$

Die Funktion  $X$  ist als Summe zweier streng konkaver Funktionen streng konkav und besitzt somit genau eine Maximalstelle bei  $\alpha_2$ . Somit ist für alle  $\alpha \geq \alpha_1 > \alpha_2$  stets  $X(\alpha) \leq X(\alpha_1)$ .

Ist  $k = 4$  und  $a < c$ , so ist  $\alpha \geq \alpha_1 \approx 0.681$  und  $\alpha_2 \approx 0.653$ , d.h. es ist  $\alpha \geq \alpha_1 > \alpha_2$ . Somit ist in diesem Fall  $X(\alpha) \leq X(\alpha_1) \approx 2.2005$ . Daher ist für  $k = 4$ ,  $a < c$  und  $2\alpha \leq \beta$  die obere Abschätzung für das Polyedervolumen kleiner als das Volumen einer symmetrischen antiprismatischen Doppelpyramide maximalen Volumens. Ist  $k = 4$ ,  $a < c$  und  $2\alpha > \beta$ , so wird das Volumen der Ringdreiecke - bei fester Fläche - vergrößert, wenn wir  $\alpha$  bei festem  $\alpha + \beta$  verkleinern, denn dadurch wird die Differenz zwischen  $2\alpha$  und  $\beta$  verkleinert und wir erhalten ein "gleichseitigeres" Dreieck. [s. Bemerkung zu Lemma 2]. Wir verkleinern nun  $\alpha$  bis  $a = c$  oder  $2\alpha = \beta$  eintritt. Ist  $a = c$ , so fällt die Funktion  $W$  mit der Funktion  $V$  des vorigen Abschnittes zusammen, ist  $2\alpha = \beta$  so haben wir soeben gezeigt, daß es eine symmetrische antiprismatischen Doppelpyramide gibt, deren Volumen größer ist als die obere Abschätzung des Polyedervolumens.

Für  $k = 6$  ist  $\alpha_1 \approx 0.598$  und  $\alpha_2 \approx 0.613$ , d.h. es ist  $\alpha_2 > \alpha_1$ . Daher können wir den Fall  $a < c$  für  $k = 6$  nicht ausschließen.

**(c)** Auch für  $a > c$  betrachten wir zunächst  $2\alpha \geq \beta$ . Durch dieselbe Überlegung erhalten wir wiederum die obere Abschätzung  $W$  mit  $W \leq X$ , diesmal ist aber  $\alpha \leq \alpha_1$ . Daher können wir diesen Fall für  $k = 4$  nicht ausschließen, für  $k = 6$  ist jedoch für  $\alpha \leq \alpha_1 < \alpha_2$  auf stets  $X(\alpha) \leq X(\alpha_1) \approx 2.705$ , denn die streng konkave Funktion  $X$  ist für  $\alpha < \alpha_2$  streng monoton wachsend, und es ist  $\alpha_1 < \alpha_2$ .

Entsprechend den obigen Überlegungen können wir den Fall  $a > c$  und  $2\alpha < \beta$  wiederum auf die Fälle  $a = c$  oder  $2\alpha = \beta$  zurückführen.

Daher ist der Wert der oberen Abschätzung  $W$  für  $k = 4$  und  $a < c$  sowie für  $k = 6$  und  $a > c$  nie größer als das Volumen der volumsgrößten symmetrischen antiprismatischen Doppelpyramide. Daß bei den jeweils anderen Fällen die obere Abschätzung nie als Polyedermosaik realisiert werden kann, ist zwar offensichtlich, aber wir haben nicht gezeigt, daß diese Fälle entweder nie auftreten können, oder daß es auch bei ihnen eine obere Abschätzung des Polyedervolumens gibt, deren Maximalwert kleiner ist als das Volumen der volumsgrößten antiprismatischen symmetrischen Doppelpyramide.

Um auch diese Fälle ausschließen zu können, müßte sich wahrscheinlich folgende Vermutung beweisen lassen:

*Vermutung:* Wir betrachten zu den Dreiecken einer Ecke  $E$  vom Grad  $k$  die Dreiecke des Mosaikes, die mit einem Dreieck der Ecke vom Grad  $k$  eine gemeinsame Kante besitzen. Dann ist die Summe der Volumina dieser Dreiecke vermutlich kleiner oder gleich dem Volumen einer regulären Ecke vom Grad  $k$  mit kantenbenachbarten gleichschenkeligen kongruenten Dreiecken, wobei die Flächensumme beider Strukturen übereinstimmen.

Diese Vermutung ließe sich auf ein Polyeder vom Typus Nr. 84 der Brückner'schen Liste anwenden, denn dieses besitzt eine Ecke  $E$  vom Grad 6. Läßt sich die Vermutung für  $k = 6$  beweisen, so wäre das Volumen des Polyeders kleiner oder gleich:

$$Z = 6 \cdot G\left(\frac{\pi}{6}, \gamma\right) + 6 \cdot G(\alpha, \beta) + 4 \cdot U\left(\frac{4\pi - 12 \cdot (\pi/6 + \alpha + \beta + \gamma - \pi)}{4}\right)$$

mit  $\frac{\cos \pi/6}{\sin \gamma} = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$ . Diese Funktion besitzt unter der angegebenen Nebenbedingung ziemlich

sicher eine eindeutige Maximalstelle, die sich numerisch ermitteln läßt, dabei ist jedoch auf den Definitionsbereich von  $Z$  genau zu achten. Wir erhalten  $Z < 2.21347 < 2.21871$ .

(3) Die antiprismatische Doppelpyramide läßt sich als spezielles Beispiel eines *axialsymmetrischen Polyeders* betrachten. Bei einem solchen Polyeder befindet sich je ein Eckpunkt im Nord- und im Südpol der Kugel, und die weiteren Eckpunkte sind äquidistant auf Breitenkreisen verteilt; dabei seien möglichst viele Dreiecksflächen des Polyeders gleichschenkelig. Wir untersuchen hier nur axialsymmetrische Anordnungen, bei denen zwei

benachbarte Breitenkreise entweder gleich viele Eckpunkte besitzen, oder bei denen der eine doppelt so viele Eckpunkte besitzt wie der andere. Befinden sich auf dem einen Breitenkreis  $k$  Punkte, so besitzt daher der andere  $k$  oder  $2k$  Punkte; und das Polyedermosaik bestehe dabei nur gleichschenkeligen oder rechtwinkligen Dreiecken. Üblicherweise werden solche Polyeder mit den Symbolen  $(1,k,k,\dots,k,k,1)$  bzw.  $(1,k,2k,\dots,2k,k,1)$  bezeichnet. Ist  $k = 3$ , so müssen wir diesen Bauplan etwas abändern, damit das Polyeder keine Ecke vom Grad 3 besitzt. Dazu löschen wir die Punkte in den Polen der Kugel. und erhalten dadurch Polyeder vom Typ  $(3,3,\dots,3,3)$  bzw.  $(3,6,\dots,6,3)$ . Weiters untersuchen wir auch Polyeder vom Typ  $(3,6,9,6,3)$  bzw.  $(3,6,9,9,6,3)$ .

Obwohl die untersuchten axialsymmetrischen Polyeder nur gleichschenkelige oder rechtwinkelige Dreiecke besitzen, erhalten wir für ihr Volumen keine streng konkave Funktionen. Diese besitzen jedoch - sofern konvexe Polyeder vorliegen - ein eindeutiges Maximum, das sich numerisch ermitteln läßt. Die entsprechenden Resultate sind in Tabelle 1 zusammengefaßt; diese enthält von jedem axialsymmetrischen Polyeder die Anzahl seiner Ecken, seinen Typus, sein maximales Volumen und die Koordinaten der zugehörigen Breitenkreise.



(4) Um das Volumen eines Polyeders zu maximieren, dessen topologischen Typus wir bereits kennen, verwenden wir die

**Proposition 4:** *Es sei E eine beliebige Ecke des Polyeders P. Ist E in zyklischer Reihenfolge zu  $E_1, \dots, E_k$  benachbart, so setzen wir  $p = OE$  bzw.  $p_i = OE_i$ ,  $i = 1 \dots k$ . Dann kann das Polyedervolumen nur dann maximal sein, wenn bei jeder Ecke des Polyeders die Vektoren  $p$  und  $p_1 \times p_2 + \dots + p_k \times p_1$  in dieselbe Richtung weisen.*

Bew.: Ist E in zyklischer Reihenfolge zu  $E_1, \dots, E_k$  benachbart, und liegt E im Inneren des durch  $E_1, \dots, E_k$  erzeugten sphärischen Polygons, so nennen wir  $E_1, \dots, E_k$  das zu E "benachbarte Kantentpolygon". Dieses läßt sich, nach eventueller Umnummerierung, in positiv orientierte Dreiecke  $E_i E_{i+1} E$  zerlegen (dabei ist  $E_{k+1} := E_1$ ). Ist O der Kugelmittelpunkt, und bezeichnen wir mit N die Eckensinussumme der Dreiecke, die E nicht als Eckpunkt besitzen, und ist weiters  $OX \cdot OY$  das innere Produkt und ist  $OX \times OY$  das äußere Produkt der Vektoren OX und OY, so ist wegen  $|OX, OY, OZ| = (OX \times OY) \cdot OZ$  das Volumen des Polyeders gegeben durch

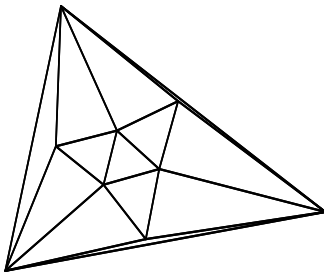
$$6 \cdot V = ( |OP_1, OP_2, OP| + \dots + |OP_k, OP_1, OP| ) + N = (OP_1 \times OP_2 + \dots + OP_k \times OP_1) \cdot OP + N = OP \cdot Q + N.$$

Eine Änderung von E läßt N unverändert. Das innere Produkt aus  $p = OP$  und Q und damit auch das Volumen des Polyeders wird hingegen am größten, wenn OP und Q in dieselbe Richtung weisen. Befindet sich  $Q' = Q/|Q|$  im Inneren des benachbarten Kantentpolygons, so können wir das Polyedervolumen dadurch maximieren, daß wir E durch Q' ersetzen; befindet sich Q' außerhalb oder auf dem Rand des benachbarten Kantentpolygons, so wird V für einen Randpunkt des benachbarten Kantentpolygons maximal. Dann stimmt jedoch das Polyeder nicht mehr mit der konvexen Hülle seiner Eckpunkte überein; und diese besitzt ein größeres Volumen als das Polyeder selbst. Dieser Fall kann beim optimalen Polyeder jedoch nie eintreten ♦

Durch den im Beweis verwendeten Prozeß vergrößern wir die Volumenssumme der Dreiecke, die sich in einer Ecke des Polyeders treffen, und damit zugleich das Volumen des gesamten Polyeders. Wenden wir den Prozeß in beliebiger Reihenfolge auf die Ecken des Polyeders an, so erhalten wir eine Folge von Polyedern mit immer größerem Volumen, die aber alle in der Kugel enthalten sind. Somit ist die streng monoton wachsende Folge der Polyedervolumina nach oben beschränkt und die Folge der Polyeder führt - ausgehend von einem Ausgangspolyeder - immer zu einem "besten" Polyeder mit "größtem" Volumen; bei diesem muß in jeder Ecke die angegebene Bedingung

notwendigerweise erfüllt sein. Dies ist z.B. der Fall bei der in **(III.1)** untersuchten symmetrischen antiprismatischen Doppelpyramide maximalen Volumens. Wir können jedoch nicht ausschließen, daß wir ein anderes "bestes" Polyeder erhalten, wenn wir bei einem anderen Polyeder gleichen Typs beginnen. D.h. es könnte also zu einem topologischen Typus mehrere "beste" Polyeder geben.

Als Beispiel betrachten wir dazu den Typus, den das für  $n = 9$  optimale Polyeder besitzt. Diesen haben wir bereits eindeutig bestimmt [**(I.7)** sowie **(II.1)**]. Nun betrachten wir ein symmetrisches 9-eckiges Polyeder diesen Typs (Abb.4).



Das läßt sich so realisieren: Die Punkte 1 bis 3, 4 bis 6 und 7 bis 9 bilden gleichseitige Dreiecke, von denen das erste dem Äquator eingeschrieben ist; die beiden anderen befinden sich auf parallelen Breitenkreisen mit demselben Abstand zum Äquator.

Dabei besitze die konvexe Hülle der Punkte nur gleichschenkelige oder gleichseitige Dreiecke. Die Polarkoordinaten der Punkte sind dann durch gegeben:

$$\begin{aligned} P_1(-2\pi/3, 0) \quad P_2(0, 0) \quad P_3(2\pi/3, 0) \\ P_4(-\pi/3, x) \quad P_5(\pi/3, x) \quad P_6(\pi, x) \\ P_7(-\pi/3, -x) \quad P_8(\pi/3, -x) \quad P_9(\pi, -x) \end{aligned}$$

Laut Prop. 4 gilt notwendigerweise für die Ecken des optimalen Polyeders, daß  $p_2$  und

$$p_4 \times p_7 + p_7 \times p_8 + p_8 \times p_5 + p_5 \times p_4 = (p_4 - p_8) \cdot (p_7 - p_5)$$

in dieselbe Richtung weisen, und ebenso

$$p_5 \text{ und } p_4 \times p_2 + p_2 \times p_8 + p_8 \times p_3 + p_3 \times p_6 + p_6 \times p_4$$

Wegen der symmetrischen Anordnung der Polyedereckpunkte, ist die erste Gleichung immer erfüllt; aus der zweiten Gleichung folgt, daß auch

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ \sqrt{3} \cdot \cos x \\ 2 \cdot \sin x \end{pmatrix} \text{ und } \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cdot \sin x \cdot (\cos x + 2) \\ 3 \cdot \sin x \cdot (\cos x + 2) \\ \sqrt{3} \cdot \cos x \cdot (\cos x + 4) \end{pmatrix}$$

in dieselbe Richtung weisen; ihr Kreuzprodukt muß daher verschwinden. Damit erhalten wir

$$\cos^3 x + 8 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x - 4 = 0 \text{ bzw. } (t^2 + 2t - 2) \cdot (3t + 2) = 0,$$

wenn wir  $\cos x$  durch  $t$  ersetzen. Diese Gleichung besitzt die Lösungen  $-\sqrt{3} - 1$ ,  $\sqrt{3} - 1$  und  $-2/3$ . Die erste Lösung ist kleiner  $-1$  und ist daher nicht weiter von Bedeutung.



Ist  $t = \sqrt{3} - 1$ , so erhalten wir ein konvexes Polyeder mit Volumen  $3 \cdot \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx 2.04375$ ; ist jedoch  $t = -2/3$ , so erhalten wir ein nicht konvexes Polyeder mit negativem Volumen.

Berechnen wir das Volumen des symmetrischen Polyeders mit den Mitteln der sphärischen Trigonometrie, so erhalten wir für das Polyeder mit maximalem Volumen dieselbe Gleichung. Dazu sei  $\cos a = P_4 \cdot P_5$ ,  $\cos b = P_1 \cdot P_4$ . Die Winkel bei  $P_1$  ergänzen sich auf  $\pi$ , und die gleichschenkeligen Dreiecke um  $P_1$  besitzen denselben Eckensinus  $S_2$ , da  $\sin x = \sin(\pi - x)$ . Die Höhe von  $P_1$  auf  $P_5P_8$  beträgt  $2\pi/6 = \pi/3$  und  $P_5P_8$  hat die Länge  $2x$ . Somit ist:

$$S_2 = (\sqrt{3}/2) \cdot \sin 2x = \sqrt{3} \cdot \cos x \cdot \sin x.$$

Die Kantenlänge des gleichseitigen Dreiecks  $\Delta P_4P_5P_6$  beträgt  $a$ , und sein Eckensinus ist:

$$S_1 = \sqrt{1 - 3 \cdot \cos^2 a + 2 \cdot \cos^3 a} = (1 - \cos a) \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \cos a}$$

Aus  $\cos a = -(1/2) \cdot \cos^2 x + \sin^2 x$  folgt:  $S_1 = (3/2) \cdot \cos^2 x \cdot \sqrt{3} \cdot \sin x$ ; daher ist das Volumen des Polyeders gegeben durch  $V = \frac{2}{6} \cdot S_1 + \frac{12}{6} \cdot S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot (\cos x + 4)$ .

Daraus erhalten wir, wenn wir die Konstante  $\sqrt{3}/2$  vernachlässigen:

$$V' = (\cos^3 x + 4 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin^2 x - \cos x \cdot \sin^2 x) = (2 + 3t) \cdot (t - (\sqrt{3} - 1)) \cdot (t + (\sqrt{3} + 1))$$

mit  $t = \cos x$ .

Aus der Proposition 4 folgt auch, daß das Polyeder, das das Volumen der konvexen Hülle maximiert, nur ein Dreieckspolyeder sein kann. Denn jede mehr als dreiseitige Fläche können wir diese auf mehrere Arten diagonalisieren. Nach jeder Diagonalisierung muß für jeden Eckpunkt des Polyeders die Gleichung der Prop. 4 gelten, doch daraus resultiert ein Widerspruch. Dieser Beweis stammt aus [3], ein geometrischer Beweis dieser Aussage ist in [18] zu finden.

(5) Wollen wir den beschriebenen Optimierungsalgorithmus implementieren, so ist es zweckmäßig, das Polyeder durch seine Inzidenzmatrix  $M$  darzustellen. Diese hat  $n$  Zeilen und  $(2n - 4)$  Spalten und legt die topologische Struktur des Polyeders eindeutig fest. Wir numerieren die Punkte und die Flächen des Polyeders, und setzen  $M(i,j) = 1$ , wenn der  $i$ -te Punkt des Polyeders zur  $j$ -ten Fläche gehört, und  $M(i,j) = 0$  sonst. In jeder Spalte von  $M$  stehen somit, da wir uns auf Dreieckspolyeder beschränken können, drei Einser und die Anzahl der Einser der  $i$ -ten Zeile ist gleich dem Grad der  $i$ -ten Ecke. Durchlaufen wir die  $j$ -te Spalte der Matrix von der ersten bis zur

letzten Zeile, so erhalten wir die Eckpunkte der  $j$ -ten Fläche in lexikographischer Ordnung. Um auch die Orientierung der Flächen anzugeben, erweitern wir  $M$  durch eine 0-te Zeile. Dabei sei  $M(0,j) = 0$ , wenn die positive Orientierung des Dreiecks mit der lexikographischen Ordnung der Eckpunkte übereinstimmt, und  $= 1$  sonst. Die Koordinaten der Eckpunkte werden in einer  $n \times 3$  - Matrix gesondert abgespeichert.

Zum Berechnen des Polyedervolumens bestimmen für jede Seite des Polyeders die Determinante der Koordinaten der Eckpunkte, die zu dieser Seite gehören - dabei ist auf die Orientierung des Dreiecks zu achten - addieren die erhaltenen Zahlen, und teilen die Summe durch 6. Um ein Polyeder mit größerem Volumen zu finden, starten wir bei einer Ecke  $E$ , bestimmen das benachbarte Kantenpolygon  $K$  und den Punkt  $Q'$ . Nun müßten wir untersuchen, ob sich  $Q'$  im Inneren von  $K$  befindet oder nicht, und dem Algorithmus entsprechend vorgehen. Es stellt sich jedoch heraus, daß es ausreicht,  $E$  durch  $Q'$  zu ersetzen, wodurch der Algorithmus stark beschleunigt wird. Diesen Prozeß führen wir für alle Ecken des Polyeders aus und notieren uns die jeweilige Entfernung von  $E$  zu  $Q'$ . Sind alle Eckpunkte durchlaufen, addieren wir diese Abstände; ist diese Summe kleiner als eine vorgegebene Toleranzgrenze, beenden wir den Algorithmus, andernfalls führen wir den Algorithmus ein weiteres mal aus.

Es zeigt sich bereits bei einigen Probeläufen, daß der Algorithmus meist sogar dann zu einem konvexen - und wahrscheinlich für den Typus optimalen - Polyeder führt, wenn wir die Startwerte des Algorithmus zufällig wählen. Sollte er hingegen zu einem nicht konvexen Polyeder führen, suchen wir neue Startwerte und starten den Prozeß von neuem.

Weiters führt der Algorithmus bei einem gegebenen Typus immer zu einem konvexen Polyeder. Somit dürfte es zu jedem der Kugel einschreibbaren Dreieckstypus genau ein der Kugel einbeschriebenes konvexes Polyeder geben, das diesen Typ besitzt und bei dem für jede Ecke die Bedingung der Prop. 4 gilt. Weiters besitzt dieses Polyeder anscheinend alle Symmetrieebenen, die der Typus zuläßt. Daß wir bei dieser Vermutung auf die Bedingung "konvex" nicht verzichten dürfen, zeigt das Beispiel des für  $n = 9$  vermutlich optimalen Polyeders.